LOI BINOMIALE

I) Epreuve de Bernoulli

Définition :

On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre p, $0 \leqslant p \leqslant 1$, toute épreuve aléatoire admettant exactement deux issues :

l'une appelée succès : S, dont la probabilité est : $p(S) = p$.
l'autre appelée échec : E, dont la probabilité est : $p(E) = 1 - p$.

II) Loi binomiale

A) Définition :

On répète n fois une épreuve de Bernoulli, de paramètre p et ceci de façon indépendante.
On définit alors la variable aléatoire X, qui compte le nombre de succès au cours de ces n épreuves de Bernoulli.
La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n (le nombre d'épreuves de Bernoulli) de paramètre p (la probabilité du succès).

Notation :

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n, de paramètre p se note : $\boxed{\text{X suit la loi } B(n,p)}$

B) Exemple :

On répète 5 fois une épreuve de Bernoulli, de paramètre p et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, au cours de ces 5 épreuves. X suit donc la loi binomiale : $B(5,p)$.
Cherchons : p(X = 2).

On cherche combien il y a de façons d'obtenir 2 succès au cours de 5 épreuves :

1ère épreuve	2ème	3ème	4ème	5ème
S	S	E	E	E
S	E	S	E	E
S	E	E	S	E
S	E	E	E	S
E	S	S	E	E
E	S	E	S	E
E	S	E	E	S
E	E	S	S	E
E	E	S	E	S
E	E	E	S	S

Il y a donc 10 façons d'obtenir 2 succès au cours des 5 épreuves.

Donc : $p(X = 2) = 10.p(S)^2.p(E)^{5-2} = 10.p^2.(1 - p)^3$

C) Théorème :

1°) Théorème

$$\boxed{\text{Si X suit la loi binomiale } B(n,p)\text{, alors : } p(X = k) = \binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}}$$

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ se lit : k parmi n .

Dans l'exemple précédent : $n = 5$ et $p = 2$ et on a : $\binom{5}{2} = 10$.

2°) Comment trouve-t-on les coefficients binomiaux ?

On utilise le triangle de Pascal, pour trouver les coefficients : $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

La construction du triangle de Pascal,repose sur la propriété : $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$: 1

$\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$: 1 1

$\begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$: 1 2 1

$\begin{pmatrix} 3 \\ k \end{pmatrix}$: 1 3 3 1

$\begin{pmatrix} 4 \\ k \end{pmatrix}$: 1 4 6 4 1

$\begin{pmatrix} 5 \\ k \end{pmatrix}$: 1 5 10 10 5 1

$\begin{pmatrix} 6 \\ k \end{pmatrix}$: 1 6 15 20 15 6 1

Sur la cinquième ligne nous lisons les coefficients binomiaux :

$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 1.$

D) Utilisation de la calculatrice :

1°) Utilisation de la calculatrice pour trouver : $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$

Taper n puis MATH - PRB - Choix 3 - taper p - entrer

2°) Utilisation de la calculatrice pour trouver : $p(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} .p^k.(1-p)^{n-k}$

Taper 2nde var(distr) - choix0 (binomFdp) - entrer - (n,p,k) - mathFrac

III) Exercice :

On lance 7 fois, une pièce de 1euro, équilibrée. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où l'on obtient PILE au cours des 7 lancers.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ?
2. Calculer : E(X), V(X) et $\sigma(X)$.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois PILE, au cours des 7 lancers.
4. Quelle est la probabilité d'obtenir au plus 6 fois PILE, au cours des 7 lancers ?
5. Cette fois, on lance n fois la pièce.
   Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 1 fois PILE au cours des n lancers ?
   Déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle cette probabilité dépasse 0,999.

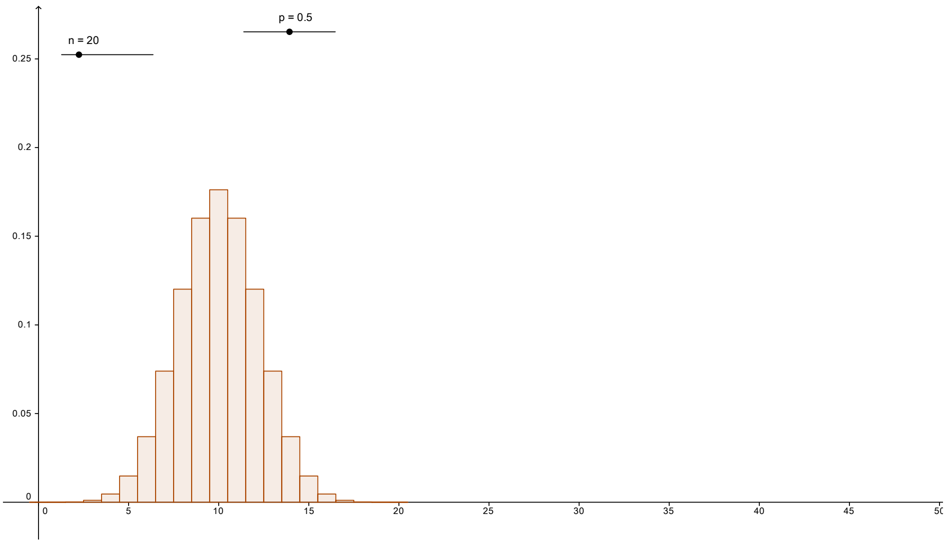
IV) Représentation graphique d'une loi binomiale :

Si la variable aléatoire$X$ suit la loi binomiale $B(n, p)$, alors X peut prendre les valeurs : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; .... ; n.
On place en abscisses les valeurs possibles de X et on construit les n rectangles dont l'aire représente la probabilité.
Ainsi pour k (placé en abscisses), compris entre 0 et n, l'aire du rectangle représente : $p(X = k)$.

Exemples :

(1)Si la variable aléatoire$X$ suit la loi binomiale $B(n = 20, p = 0,5)$, on obtient :

fig1binom



(2) Si la variable aléatoire$X$ suit la loi binomiale $B(n = 20, p = 0,5)$, on obtient :

fig2binom