Partie A

$$f(x) = x - e^{-x} \text{ sur } \mathbb{R}$$

1. x solution de $e^x = \dfrac{1}{x} \underset{(x\neq 0)}{\Longleftrightarrow} \quad xe^x = 1 \Leftrightarrow x = e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = 0$

2. (a) $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$. f est croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(b) D'après ce tableau de variation, f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $0 \in]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$
D'après le théorème de la bijection, il existe un seul réel α dans $\mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$.

(c) La calculatrice indique que $f(\frac{1}{2})$ est négatif et $f(1)$ positif, ce qui implique que $\alpha \in [\frac{1}{2}; 1]$.

(d) $f(0) = -1$, d'après le tableau de variation, $f(x)$ est donc négatif sur $[0; \alpha]$.

Partie B

$$g(x) = \frac{1+x}{1+e^x} \text{ sur } [0;1]$$

1. $g(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1+e^x} = x \Leftrightarrow 1 + x = x + xe^x \Leftrightarrow xe^x = 1 \Leftrightarrow x = e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = 0$

2. On sait que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$ alors on en déduit que $g(x) = x \Leftrightarrow x = \alpha$.

3. $g'(x) = \dfrac{1 + e^x - (1+x)e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{1 - xe^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x(e^{-x} - x)}{(1+e^x)^2} = -\dfrac{e^x f(x)}{(1+e^x)^2}$
et, puisque $f(x)$ est négative sur $[0; \alpha]$, $g'(x)$ est positive sur cet intervalle.

Partie C

$u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. • Initialisation :
   $u_1 = g(u_0) = g(0) = \frac{1}{2} \leq \alpha$
   On a bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$
   • Hérédité :
   Supposons que, pour un certain rang n de $\mathbb{N}$, on ait $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
   On devra alors prouver que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$.

   Supposons donc $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ vrai.
   Alors, puisque g est croissante sur $[0; \alpha]$: $g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(\alpha)$
   Ce qui donne :
   $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ puisque $g(\alpha) = \alpha$
   Et donc :
   $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$
   • Conclusion :
   d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$
2. Les inégalités précédentes montrent que :
   • (u_n) est croissante
   • (u_n) est majorée (par α)
   D'après le théorème de la convergence uniforme, la suite (u_n) est convergente.
   (Rappelons que ce théorème ne donne pas la valeur de la limite)
3. (a) Soit $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

   Tous les termes u_n se trouvant dans $[0; \alpha]$, l s'y trouve aussi.

   Comme la fonction g est continue sur $[0; \alpha]$, l vérifie $l = g(l)$ dont on a vu que c'est équivalent à $\underline{l = \alpha}$.

   ALGORITHME

   ```
   variables u, n, i
   Debut
     0 → u
     Pour i variant de 1 à 4
       (1+u)/(1+e^u)→ u
     fin Pour
     Afficher u
   Fin
   ```

   VERSION T.I

   ```
   0 → U
   for(I;1;4)
     (1+U)/(1+e^U)→ U
   End
   Disp U
   ```

   (b)

   La calculatrice indique $l \approx 0,567143$