$$f(x) = e^{\frac{x}{x+1}} \text{ sur }]-1;+\infty[$$

Soit $u(x) = \dfrac{x}{x+1}$ donne $u'(x) = \dfrac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

Alors $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}}$. Cette dérivée est strictement positive sur le domaine de définition de f.

Ainsi, f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e^1 = e$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x}{x+1} = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -1} x+1 = 0$ tout en restant positif, car $x > -1$.

On en déduit $\lim\limits_{x \to -1} e^{\frac{x}{x+1}} = 0$ puisque $\lim\limits_{u \to -\infty} e^u = 0$.